Высшая математика (4 часть – математическое программирование)

Математическое программирование – это область математики, в которой рассматривается теория и численные методы решения задач на экстремум функции многих переменных, когда на эти переменные наложены дополнительные ограничения, играющие существенную роль при решении задачи. В отличие от классической математики, математическое программирование занимается математическими методами решения задач нахождения наилучших вариантов из всех возможных.

Математическая модель – это отражение оригинала в виде математических выражений (функций, уравнений, неравенств, цифр и т.д.). Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, называют целевой, показателем эффективности или критерием оптимальности. Экономические возможности формализуются в виде системы ограничений. Все это и составляет математическую модель задачи.

Линейное программирование — математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения экстремальных задач на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств. Линейное программирование является частным случаем выпуклого программирования, которое в свою очередь является частным случаем математического программирования.

Экстре́мум (лат. *extremum* —крайний) — *максимальное* или *минимальное* значение функции на заданном множестве планов. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума*. Соответственно, если достигается минимум — точка экстремума называется *точкой минимума*, а если максимум — *точкой максимума*.

Оптимизация — задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области n-мерного векторного пространства, ограниченной набором линейных и/или нелинейных равенств и/или неравенств.

Задача минимизации (максимизации) - задача вещественнозначной функции $z=f(\vec{x})$ n-мерного векторного аргумента $\vec{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$ компоненты которого удовлетворяют системе уравнений $g_i(x_1;x_2;...;x_n)\{\le;=;\ge\}b_i,\ i=\overline{1,m}$, где g_i и f – заданные функции, b_i – некоторые постоянные. Условия $g_i(x_1;x_2;...;x_n)\{\le;=;\ge\}b_i,\ i=\overline{1,m}$ называют *ограничениями задачи математического программирования*, функцию $z=f(\vec{x})$ – *целевой функцией*.

Допустимое решение задачи (допустимый план) – решение, удовлетворяющее всем ограничениям задачи, т.е. план $\vec{x}$, удовлетворяющий ограничениям $g_i(x_1; x_2; ...; x_n)\{\leq; =; \geq\}b_i,\ i = \overline{1, m}$.

Область допустимых решений - всё множество допустимых планов.

Оптимальное решение (оптимальный план) - допустимый план задачи математического программирования, доставляющий экстремум целевой функции. Оптимальное решение может быть неединственным. Возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесконечное множество оптимальных решений.

Задача линейного программирования – задача математического программирования, модель которой содержит только линейные выражения относительно переменных $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, т.е. функции $f(\vec{x})$ и g_i, $(i = \overline{1, m})$ являются линейными.

Задача транспортная - классическая задача линейного программирования о минимизации стоимости перевозок однородного груза.

Задача о распределении ресурсов - задача о распределении ограниченного ресурса между потребителями оптимальным образом.

Задача о рационе - задача о составлении суточного рациона питания минимальной стоимости, удовлетворяющего потребности во всех питательных веществах.

Задача целочисленного программирования - задача, в которой компоненты вектора $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ должны принимать только целые значения.

Градиент функции - вектор, указывающий направление наискорейшего возрастания целевой функции. Координатами вектора градиента являются первые частные производные функции по всем переменным: $\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$ т.е. градиент – это вектор-столбец.

Антиградиент функции - вектор противоположный градиенту, т.е. $-\nabla f(\vec{x}) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}; -\frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots; -\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$ и указывающий направление наискорейшего убывания функции.

Симплекс-метод (универсальный) – численный метод (алгоритм) решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора опорных планов (вершин) выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Метод потенциалов является модификацией симплекс-метода решения задачи линейного программирования применительно к транспортной задаче. Он позволяет, отправляясь от некоторого допустимого решения, получить оптимальное решение за конечное число итераций, используя только операции сложения и вычитания.

Алгори́тм Го́мори — алгоритм, который используется для решения полностью целочисленных задач линейного программирования.

Выпуклая функция – функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве **X**, называется выпуклой, если для любых точек x' и x'' из этого множества и любого $0 \le \lambda \le 1$ справедливо неравенство: $f\left(\lambda x' + (1-\lambda)x''\right) \le \lambda f\left(x'\right) + (1-\lambda) f\left(x''\right)$. Если в данном соотношении при $0 < \lambda < 1$ и любых $x', x'' \in X$ имеет место строгое неравенство, то $f(x)$ – строго выпукла.

Локальный экстремум: Говорят, что функция $z = f(x)$, определенная на некотором замкнутом множестве **X**, достигает в точке $x_0 \in X$ локального максимума (локального минимума), если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \varepsilon$, выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$).Точка x_0, в которой функция достигает локального максимума (минимума), называется точкой локального максимума (минимума).

Глобальный экстремум: Пусть функция $z = f(x)$ определена на замкнутом множестве **X**. Если $x_0 \in X$ и $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) для любой точки $x \in X$, то говорят, что в точке x_0 функция достигает абсолютного максимума (минимума). Вместо термина «абсолютный» часто используют термин «глобальный». Т.е. глобальный максимум – это наибольшее значение функции в области определения. Глобальный максимум и минимум называют глобальными экстремумами функции.